Высшая проба 7 класс

Задача 1. (Фольклор)

В трёх коробках лежат шарики. В первой – красные, во второй – белые, в третьей лежат шарики и красного, и белого цвета. На каждой коробке сделан надпись «красные», «белые», «смешанные», но известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Семиклассник Сергей хочет узнать, где какие шарики. Для этого он может распечатать ровно одну коробку и вынуть оттуда ровно один шарик. Сможет ли он добиться своей цели?

Ответ: Да. **Решение:**

Взять из коробки "смешанные":
Красный ⇒ в коробке со смешанными шариками красные ⇒ в коробке с белыми шириками не белые и не красные (тогда смешанные) ⇒ в коробке с красными белые

Критерии: Правильное решение: 15 баллов $(+)$

Неочевидное и непонятное следствие вида «в смешанных красный ⇒ в красных белые»: 11 баллов $(\pm)$

Задача 2

(Штерн А.) На доске написано положительное число, с которым разрешается делать следующие операции:

1) умножать на два;

2) прибавлять один.

Каждый из трёх школьников один раз применил к имеющемуся числу первую операцию и два раза вторую операцию в некотором порядке. При этом все три числа оказались различными, и число, полученное первым школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 60%. Докажите, что число, полученное третьим школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 30%.

Решение: Из x можно сделать $2x+2, 2x+3, 2x+4$

При $x>0$: $2x+4$ не может быть на 60% больше чем $2x+3$ (так как 1 больше чем 60% от $2x+3$)

$(2x+2)*160\% < 2x+4 \Rightarrow 1{,}2x < 0{,}8 \Rightarrow x < \dfrac{2}{3}$

Тогда $(2x+3)*130\% < 2x+4$

Критерии: Правильное решение: 15 баллов $(+)$

Не разобран случай с другим соответствием чисел и школьников: 11 баллов $(\pm)$

Получена оценка $x < \frac{2}{3}$: не меньше 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Только сопоставлены числа и школьники: 6 баллов $(\mp)$

Задача 3

(Штерн А.) В прямоугольном треугольнике KLM проведены биссектрисы KE и LF, пересекающиеся в точке O. Прямая, делящая на две равные части угол EOL, отсекает от исходного треугольника равнобедренный. Найдите острые углы треугольника KLM.

Ответ: $(45°, 45°), (18°, 72°), \left(\frac{270°}{7}, \frac{360°}{7}\right)$

Решение:

Случай 1: проведены биссектрисы двух острых углов.

Пусть биссектриса угла EOL пересекает катет KM в точке T, катет LM в точке S и $\angle EKM = \alpha$.

Тогда $\angle KOF = 45° \Rightarrow \angle STM = \alpha + 22.5°, \angle TSM = 67.5° - \alpha$.

Отсекается треугольник STM, в котором есть прямой угол ⇒ если он равнобедренный,

$$\angle STM = \angle TSM \Rightarrow \alpha + 22.5° = 67.5° - \alpha \Rightarrow \alpha = 22.5° \Rightarrow \text{искомые углы } (45°, 45°)$$

Случай 2: проведена биссектриса острого угла L и прямого угла K.

Пусть биссектриса угла EOL пересекает катет KM в точке S, катет LM в точке T и $\angle KLO = \alpha$.

Тогда $\angle EOL = 45° + \alpha, \angle ETO = 22.5° + \frac{3\alpha}{2} \Rightarrow \angle TSM = 67.5° + \frac{\alpha}{2}$

Итак, углы отсечённого треугольника STM составляют $22.5° + \frac{3\alpha}{2}, 67.5° + \frac{\alpha}{2}$ и $90° - 2\alpha$.

Среди них есть два одинаковых.

Углы $22.5° + \frac{3\alpha}{2}$ и $67.5° + \frac{\alpha}{2}$ не могут быть равны.

Два других равенства приводят к $\alpha = 9°$ и $\alpha = \frac{135°}{7}$, то есть к ответам $(18°, 72°), \left(\frac{270°}{7}, \frac{360°}{7}\right)$.

Критерии:

Для решения задачи надо разобрать 4 подслучая (один в первом случае и 3 во втором).

Если правильно разобран

один: 6 баллов ($\mp$)

два : 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

три: 11 баллов ($\pm$)

все четыре: : 15 баллов ($+$)

Задача 4

(По материалам американских математических соревнований) Собственным делителем числа называется любой делитель, отличный от 1 и самого числа. Найдите число способов, которыми можно раскрасить в три цвета числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так чтобы цвет каждого числа отличался от цвета любого его собственного делителя. Не забудьте объяснить предложенный Вами способ подсчёта.

Ответ: 432 **Решение:**

Красим 5 и 7 (9 вариантов)

Красим 2, 4, 8 ($3 * 2 * 1 = 6$ вариантов)

Осталось покрасить 3, 6 и 9

Красим 3. Если 3 и 2 одного цвета — по 2 способа на 6 и 9

Если разных — однозначно 6 и 2 способа на 9

Итого $2 * 2 + 2 = 8$ способов на 3,6,9 и $9 * 6 * 8$ способов всего

Критерии: Правильное решение: 15 баллов $(+)$
Правильно посчитано количество способов покрасить 2, 3, 6 : 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Неправильно посчитано только количество способов 2,3,6 (например, всегда красим 2 и 3 разными цветами) : не больше, чем 6 баллов $(\mp)$

Задача 5. (Куянов Ф.)

Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены

равенства $\begin{cases} a + b = cd \\ c + d = ab \end{cases}$

Ответ: $(2, 2, 2, 2)$, $(1, 2, 3, 5)$, $(2, 1, 3, 5)$, $(1, 2, 5, 3)$, $(2, 1,5, 3)$, $(3, 5,1,2)$, $(5, 3,1,2)$, $(3, 5,2,1)$, $(5, 3,2,1)$

Решение:

$$\begin{cases} 0 = cd - a - b \\ 0 = ab - c - d \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = (cd - a - b) + (ab - c - d) + 2 = 2$$

Каждое из $(a-1)(b-1)$ и $(c-1)(d-1)$ — неотр. целое. Если это:

1 и 1 $\Rightarrow (a, b, c, d) = (2,2,2,2)$

0 и 2 $\Rightarrow (c-1)(d-1) = 2 \Rightarrow \{c, d\} = \{2,3\}, \{a, b\} = \{1, x\}, a + b = cd = 6 \Rightarrow b = 5$

2 и 0 даст перестановку. Осталось проверить, что все полученные наборы подходят под уравнения системы.

Критерии: Правильное решение: 15 баллов $(+)$

Не снижаем за потерю части случаев с перестановками 1,2,3,5

Считаем очевидными утверждения вида $a + b < ab$ при $a, b > 3$

Нет проверки ответа (и односторонние следствия в решении): 13 баллов $(+.)$

Сведено к обозримому количеству случаев (например, доказано, что все числа меньше 6): 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Получено равенство $(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = (cd - a - b) + (ab - c - d) + 2 = 2$ или аналогичное: 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Задача 6

(Сингапур-2015) Некоторые клетки квадрата 9 на 9 покрашены в чёрный цвет так, что в каждом прямоугольнике из шести клеток ровно две чёрные. Сколько всего клеток в квадрате покрашено? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

Ответ: 27

Комментарий: достаточно рассматривать прямоугольники 2×3

Решение:

Назовем нижний левый квадрат $(1, 1)$. Пример на 27 черных клеток: покрашенs в черный цвет все клетки (a, b), такие что $(a - b)$ делится на 3.

Рассмотрим квадрат 9×9 без клеток $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$. Получившуюся фигуру можно замостить тринадцатью прямоугольниками 2×3 в которых будет 26 черных клеток. Ясно, что выброшенные клетки $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ не могут быть все черные, так как они содержатся в прямоугольнике 2×3

Предположим, что среди клеток $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ нет черных клеток. Квадрат без клеток $\{(1,1), (2,1), (3,1)\}$ тоже можно замостить 13 прямоугольниками 2×3, поэтому среди $\{(1,1), (2,1), (3,1)\}$ нет черных клеток. Аналогичное рассуждение показывает, что среди $\{(3,1), (3,2), (3,3)\}$ нет черных клеток. Но тогда в прямоугольнике 2×3 из клеток $(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2)$ мы нашли 5 белых клеток. Противоречие.

Теперь предположим, что среди клеток $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ две черные. Тогда всего в квадрате 9×9 всего 28 черных клеток. Следуя раннее приведенному аргументу, получим, что в полосках $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}, \{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}, \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$ также по две черные клетки.

Среди клеток $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ все белые, так как эта полоска вместе с полоской $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ составляет прямоугольник 2×3, в котором всего 2 черные клетки. Используя этот аргумент получаем, что клетки покрашены, как на рисунке, в которой опять же можно найти прямоугольник 2×3 с пятью белыми клетками, что приводит к противоречию.

б	б	б
ч	б	ч
б	б	б
ч	б	ч

Значит среди клеток $\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ всего одна черная клетка, что соответствует примеру на 27 черных клеток.

Критерии: Правильное решение: 25 баллов (+)

Доказано, что если раскраска, удовлетворяющая условию, существует, то в ней 27 черных клеток, но не доказано существование (не приведен пример): 17 баллов ($\pm$)

Правильно доказано, что не может быть двух чёрных клеток рядом: 13 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Только правильный ответ и пример: 8 баллов ($\mp$)